

L'integrale indefinito

Stiamo per rivelare i numeri "atti di fede" di cui abbiamo parlato nel quaderno delle Regole di Fisica. Diciamo subito che esistono due tipi di integrali: indefiniti e definiti. Iniziamo con gli indefiniti.

Funzioni primitive di una funzione data

Per usare gli integrali dobbiamo anzitutto conoscere il concetto di funzione primitiva di una funzione data: "La funzione $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ continua in un intervallo I se e verificata la condizione:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Considerando ad esempio la funzione $f(x) = 1$, quante e quali sono le sue primitive? La prima ci viene in mente è $F(x) = x$. In effetti $F'(x) = 1 = f(x)$. Pensandoci un po' su ci accorgiamo però che la funzione $f(x) = 1$ è anche primitiva di altre funzioni, ad esempio: $F_1(x) = x + 5$, $F_2(x) = x + 5\sqrt{3}$, $F_3(x) = x - \frac{4 \cos \pi/42}{\ln 23 - 2^3}$, ecc. In parole, aggiungendo una qualsiasi costante K alla funzione primitiva $F(x) = x$ otteniamo infinite funzioni primitive di $f(x)$. Perciò la primitiva generica di $f(x)$ è:

$$F_2(x) = x + K$$

Abbiamo molto finora il processo che ci ha portato a definire la primitiva di $f(x)$ "in parole". In termini matematici, la totalità delle funzioni primitive della funzione $f(x)$ rispetto a x si chiama integrale indefinito e si indica col simbolo:

$$\int f(x) \cdot dx$$

Perciò, considerando $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, si avrà:

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$$

La funzione $f(x)$ contenuta nell'integrale è detta "integrand", cioè, dal latino, "che deve essere integrato" (perifrastica passiva).

Proprietà dell'integrale indefinito

Due sono le proprietà dell'integrale indefinito che dobbiamo conoscere:

- se la funzione integranda è moltiplicata per una costante, l'integrale del prodotto di funzione e costante è pari al prodotto tra la costante e l'integrale della funzione:

$$\int K \cdot f(x) \cdot dx = K \cdot \int f(x) \cdot dx$$

In effetti, calcolando le derivate dei due membri:

$$D[\int K \cdot f(x) \cdot dx] = K f(x)$$

$$D[K \int f(x) \cdot dx] = K \cdot D[\int f(x) \cdot dx] = K \cdot f(x)$$

Si ottiene la medesima somma di funzioni tra loro e moltiplicate per la medesima costante;

- la linearità dell'integrale indefinito: l'integrale della somma di più funzioni è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) \cdot dx + \int f_2(x) \cdot dx + \dots + \int f_n(x) \cdot dx$$

In effetti, calcolando le derivate dei due membri:

$$D[\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx] = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

$$D[\int f_1(x) \cdot dx + \int f_2(x) \cdot dx + \dots + \int f_n(x) \cdot dx] = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

Si ottiene la medesima somma di funzioni.

Per quanto riguarda gli integrali abbiamo solo le due formule sopra esposte: quella della funzione moltiplicata per una costante e quella della linearità dell'integrale. Non esistono invece metodi fissi per risolvere l'integrale del prodotto o del quoziente tra due funzioni (come esistevano per la derivata). Abbiamo così alcuni metodi di integrazione che andremo ad analizzare, ma per risolvere un integrale è sempre necessaria l'esperienza dell'esercizio ed una buona dose d'istinto.

Proprietà dell'integrale indefinito

Due sono le proprietà dell'integrale indefinito che dobbiamo conoscere:

- se la funzione integranda è moltiplicata per una costante, l'integrale del prodotto di funzione e costante è pari al prodotto tra la costante e l'integrale della funzione:

$$\int K \cdot f(x) \cdot dx = K \cdot \int f(x) \cdot dx$$

In effetti, calcolando le derivate dei due membri:

$$D[\int K \cdot f(x) \cdot dx] = K f(x)$$

$$D[K \int f(x) \cdot dx] = K \cdot D[\int f(x) \cdot dx] = K \cdot f(x)$$

Somma quindi a due funzioni identiche tra loro e moltiplicate per la medesima costante;

- la linearità dell'integrale indefinito: l'integrale della somma di più funzioni è uguale alla somma degli integrali delle singole funzioni:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) \cdot dx + \int f_2(x) \cdot dx + \dots + \int f_n(x) \cdot dx$$

In effetti, calcolando le derivate dei due membri:

$$D[\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx] = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

$$D[\int f_1(x) \cdot dx + \int f_2(x) \cdot dx + \dots + \int f_n(x) \cdot dx] = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

Si ottiene la medesima somma di funzioni.

Per quanto riguarda gli integrali abbiamo solo le due formule sopra esposte: quella della funzione moltiplicata per una costante e quella della linearità dell'integrale. Non esistono invece metodi fissi per risolvere l'integrale del prodotto o del quoziente tra due funzioni (come esistevano per la derivata). Abbiamo certo alcuni metodi di integrazione che analizzeremo ed analizzeremo, ma per risolvere un integrale è sempre necessaria l'esperienza dell'uso ed una buona dose d'istinto.

Integrali indefiniti immediati

Entriamo nel vivo dell'argomento esponendo gli integrali indefiniti di alcune semplici funzioni:

CASI PARTICOLARI	CASO GENERALE	FUNZIONI GONIOMETRICHE
$\int 1 \cdot dx = x + k$		$\int \cos x \cdot dx = \sin x + k$
$\int x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 + k$	$\int x^m \cdot dx = \frac{1}{m+1} \cdot x^{m+1} + k$ con $m \neq -1$	$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + k$
$\int x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 + k$		$\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = \int (1 + \cot^2 x) \cdot dx = -\cot x + k$
$\int x^3 \cdot dx = \frac{1}{4} x^4 + k$		$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \int (1 + \tan^2 x) \cdot dx = \tan x + k$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \sqrt{x} + k$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + k$
$\int \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx = \sqrt[3]{x} + k$	$\int \frac{1}{m\sqrt[m]{x}} \cdot dx = \sqrt[m]{x} + k$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arccos x + k$
$\int \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \cdot dx = \sqrt[4]{x} + k$		$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \arctan x + k$
$\int e^x \cdot dx = e^x + k$	$\int e^{mx} \cdot dx = \frac{e^{mx}}{m} + k$	$\int \frac{-1}{1-x^2} \cdot dx = \operatorname{arccot} x + k$
$\int e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{2} e^{2x} + k$		$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arccot} x + k$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + k$	$\int \frac{1}{mx} \cdot dx = \frac{\ln x }{m} + k$	
$\int \frac{1}{2x} \cdot dx = \frac{1}{2} \ln x + k$		
$\int 3^x \cdot dx = 3^x \cdot \lg_e e + k$	$\int a^x \cdot dx = a^x \cdot \lg_e e + k$	
$\int 7^x \cdot dx = 7^x \cdot \lg_e e + k$		

Osserviamo che per la primitiva che presenta il logaritmo neppure $\ln$ è necessario mettere il modulo poiché la funzione di partenza può essere positiva o negativa.

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + k = \begin{cases} \ln(x) + k_1 & \text{per } x > 0 \\ \ln(-x) + k_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Infatti $D[\ln(x)] = \frac{1}{x}$
Infatti $D[\ln(-x)] = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

In ogni caso la derivata prima è $1/x$.

Sempre nel caso del logaritmo naturale era un risultato invariante anche fissare più casi dato che il coefficiente della x si comportava da costante.

Nel caso degli integrali non ci serve la derivata $D[\log_e x] = \frac{1}{x}$, log_e è perché log_e è una costante. Perciò avremmo: $\int \frac{1}{x} \log_e x \, dx = \log_e x \cdot \ln|x| + K$.

Integrali indefiniti "quasi" immediati

In alcuni casi la funzione contenuta nell'integrale ha come argomento (o esponente, nel caso dell'esponenziale) un'altra funzione. Per poter sfruttare le regole degli integrali indefiniti immediati deve essere presente nell'integrale anche la derivata prima della funzione che è argomento (o esponente) di quella principale. Per capire meglio analizziamo i vari casi che si possono presentare in generale e con esempi:

$$- \int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) \, dx = \frac{1}{\alpha+1} \cdot [f(x)]^{\alpha+1} + K \quad (\text{la derivata prima del secondo membro deve proprio come risultato il contenuto dell'integrale}):$$

$$\int (x^4 + 2x^2 + 4)^3 \cdot (x^3 + x) \, dx = \frac{1}{4} \int 4(x^3 + x) \cdot (x^4 + 2x^2 + 4)^3 \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2+1} \cdot (x^4 + 2x^2 + 4)^{3+1} + K = \frac{(x^4 + 2x^2 + 4)^4}{12} + K$$

Affinché la funzione $(x^3 + x)$ fosse la derivata prima di $(x^4 + 2x^2 + 4)$ abbiamo moltiplicato per 4 e compensato fuori dall'integrale con $\frac{1}{4}$. Di conseguenza abbiamo potuto applicare la formula esposta all'inizio. Ecco ancora un esempio:

$$\int \cos x \cdot \sin 2x \, dx = \int 2 \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = -\frac{2}{3} \int 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x) \, dx = -\frac{2}{3} \cos^3 x + K$$

Abbiamo applicato lo stesso procedimento;

$$- \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + K:$$

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{1 + 6x - 3x^2 + 2x^3} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x^2 - 6x + 6}{2x^3 - 3x^2 + 6x + 1} \, dx = \frac{1}{6} \ln|2x^3 - 3x^2 + 6x + 1| + K$$

$$\int \frac{\cos x}{3 - 2 \sin x} \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \cos x}{3 - 2 \sin x} \, dx = -\frac{1}{2} \ln|3 - 2 \sin x| + K$$

Nel risultato del secondo esempio non è necessario mettere il modulo all'argomento del logaritmo perché al numero 3 viene sottratta una quantità compresa tra -2 e +2 dato che il seno di x varia tra -1 e +1;

$$- \int f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot dx = e^{f(x)} + K;$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot dx = 2 e^{\sqrt{x}} + K$$

$$\int e^{\sin x + 2} \cdot \cos x \cdot dx = e^{\sin x + 2} + K;$$

$$- \int f'(x) \cdot 2^{f(x)} \cdot dx = 2^{f(x)} \cdot \log_2 e + K;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot dx = 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} \cdot \log_2 e + K = 2^{1+\sqrt{x}} \cdot \log_2 e + K$$

$$\int \cos x \cdot 7^{\sin x} \cdot dx = 7^{\sin x} \cdot \log_7 e + K;$$

$$- \int f'(x) \cdot \sin f(x) \cdot dx = -\cos f(x) + K;$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln x \cdot dx = -\cos \ln x + K$$

$$\int \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot dx = \frac{1}{3} \int 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot dx = -\frac{1}{3} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + K;$$

$$- \int f'(x) \cdot \cos f(x) \cdot dx = \sin f(x) + K;$$

$$\begin{aligned} \int (\cos 2x + \sin 2x) \cdot dx &= \int \cos 2x \cdot dx + \int \sin 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \left(\int 2 \cos 2x \cdot dx + \int 2 \sin 2x \cdot dx \right) = \\ &= \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2} + K \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot dx = -\sin \frac{1}{x} + K;$$

$$- \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} \cdot dx = \tan f(x) + K;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot dx = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + K$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{\cos(x^3 - 3x)} \cdot dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 - 3}{\cos(x^3 - 3x)} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \log(x^3 - 3x) + K$$

$$- \int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} \cdot dx = -\cot f(x) + K$$

$$\int \frac{\sin^4 x + 1}{\sin^2 x} \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot dx + \cot x + K_1 =$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot dx - \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos 2x}{2} \cdot dx + \cot x + K_1 = \frac{1}{2} x + K_2 - \frac{1}{4} \sin 2x + \cot x + K_1 =$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \cot x + K$$

vedendo $\sin^2 x$, abbiamo ricordato che $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ e abbiamo adattato

la tale formula o con $2x$ raddoppiando: $\sin^2 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Allora
 riappa i risultati la proprietà distributiva e concluso l'esercizio.
 Dato che avremmo più integrali ciascuno ci ha dato una costante, alla fine abbiamo inglobato le tre costanti K_1, K_2 e K_3
 nell'unica costante K . Ecco infine un altro esempio:

$$\int \frac{x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2} \cdot \sin^2 \sqrt{x^3 + 3x^2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^3 + 3x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}} (3x^2 + 6x) dx =$$

$$= \operatorname{ctg} \sqrt{x^3 + 3x^2} + K;$$

$$- \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \arcsin f(x) + K;$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + K$$

In questo caso non abbiamo né K_1 e K_2 , ma le abbiamo inglobate due, ottenendo un K . Vediamo ancora un esempio:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{1}{2} \arcsin 2x + K$$

Analoga è la risoluzione degli esercizi che richiedono l'utilizzo dell'integrale che porta ad $\arccos x$: $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \arccos f(x) + K,$

$$- \int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + K;$$

$$\int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{1 + \ln^2 x} dx = \operatorname{arctg}(\ln x) + K$$

$$\int \frac{1}{1+3x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3}x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x) + K$$

Integrazione indefinita delle funzioni razionali

Conosciamo già il metodo di risoluzione degli integrali di molte funzioni razionali intere. Abbiamo però considerato il caso delle funzioni razionali fette, come la seguente integranda:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx$$

Se il grado di $P_1(x)$ è maggiore di quello di $P_2(x)$, dobbiamo dividere $P_1(x)$ per $P_2(x)$. Otteniamo alla fine:

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x)$$

è l'integrale sarà:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx = \int Q(x) \cdot dx + \int \frac{R(x)}{P_2(x)} \cdot dx$$

L'integrale di $Q(x)$ è molto semplice perché $Q(x)$ è un polinomio.

Rimane da calcolare l'integrale di $\frac{R(x)}{P_2(x)}$. A seconda del grado di $P_2(x)$ si distinguono tre casi:

- se $P_2(x) = ax+b$, $R(x)$ è una costante perché $P_1(x)$ è stato diviso, o da un polinomio di primo grado e ha dato come resto un numero. Pertanto si avrà (con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$):

$$\int \frac{k}{ax+b} \cdot dx = k \int \frac{1}{ax+b} \cdot dx = \frac{k}{a} \ln|ax+b| + C$$

Vediamo un esempio:

$$\int \frac{2x^3 + 4x + 1}{2x+3}$$

Dividiamo i polinomi:

$2x^3$	$+4x+1$	$2x+3$
$-2x^3 - 3x^2$		$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}$
	$3x^2 + 4x + 1$	
$+3x^2 + 9x$		
	$-5x + 1$	
$+5x + \frac{51}{4}$		
	$-\frac{47}{4}$	

Otteniamo allora:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 4x + 1}{2x+3} &= \int \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4} + \frac{-\frac{47}{4}}{2x+3} \right) dx = \int \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \right) dx + \int \frac{-\frac{47}{4}}{2x+3} dx = \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{47}{4} \int \frac{2}{2(2x+3)} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{47}{8} \ln|2x+3| + K \end{aligned}$$

- se $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $R(x)$ sarà un polinomio di grado minore o uguale a 1. Possiamo allora affermare che l'integrale

sarà ($a \in \mathbb{R}_0, b, c \in \mathbb{R}$)

$$\int \frac{g(x+c)}{ax^2+bx+c} dx$$

Se $D(ax^2+bx+c) = g(x+c)$, ci ridimensioniamo al secondo caso analizzato degli integrali "quasi" immediati:

$$\int \frac{g(x+c)}{ax^2+bx+c} dx = \ln |ax^2+bx+c| + K$$

La maggior parte delle volte non sarà così fortunata. Bisogna allora distinguere tre casi a seconda del valore del Δ del polinomio al denominatore. Analizziamoli con degli esempi:

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: si calcolano le radici del denominatore e lo si scompone. Ricordando che $y = ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, consideriamo il seguente integrale:

$$\int \frac{x-16}{x^2-2x-8} dx$$

troviamo le radici del denominatore:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = 1 \pm 3 \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -2$$

Allora:

$$y = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

Portiamo all'integrale:

$$\int \frac{x-16}{x^2-2x-8} dx = \int \frac{x-16}{(x-4)(x+2)} dx$$

A questo punto possiamo affermare che l'integrando è dato dalla somma di due funzioni: la prima con denominatore $(x-4)$, la seconda con denominatore $(x+2)$. I numeratori saranno due generici valori A e B :

$$\frac{x-16}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{(A+B)x + 2A - 4B}{(x+2)(x-4)}$$

Per il principio di identità dei polinomi, due polinomi sono uguali se e solo se sono rispettivamente uguali i coefficienti delle incognite di ugual grado. Per sapere quanto valgono A e B , poniamo allora rispettivamente uguali i coefficienti delle incognite di ugual grado:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-4B=-16 \end{cases} \quad \begin{cases} -2A-2B=-2 \\ 2A-4B=-16 \end{cases} \quad \begin{cases} B=3 \\ A=-2 \end{cases}$$

$$6B = 18$$

$$B = 3$$

Perciò si ottiene:

$$\frac{x-16}{(x-4)(x+2)} = -\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+2}$$

Possiamo ora risolvere l'integrale inserendo il risultato ottenuto:

$$\int \frac{x-16}{(x-4)(x+2)} dx = \int \left(-\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \int -\frac{2}{x-4} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = -2 \int \frac{1}{x-4} +$$
$$+ 3 \int \frac{1}{x+2} dx = -2 \ln|x-4| + 3 \ln|x+2| + K;$$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$: in questo caso il denominatore della funzione integranda è un quadrato di polinomio. Ricordando che, per un quadrato perfetto, si ha $y = ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2$, consideriamo il seguente integrale:

$$\int \frac{3x-5}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx = \int \frac{3x-5}{(x-\frac{1}{2})^2} dx$$

Al denominatore abbiamo il quadrato di polinomio. Dobbiamo ricavare al numeratore la sua derivata. Per ottenere anzitutto $2x$, moltiplichiamo e dividiamo per 2 (2x è la derivata prima di x^2):

$$\int \frac{3}{2} \cdot \frac{2(3x-5)}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-\frac{10}{3}}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx$$

Ora, per ottenere -1 (derivata prima di $-x$) sottraiamo e sommiamo $\frac{7}{3}$ al numeratore:

$$\frac{3}{2} \int \frac{2x-\frac{10}{3}}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-\frac{10}{3}+\frac{7}{3}-\frac{7}{3}}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-1-\frac{7}{3}}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx$$

A questo punto separiamo $2x-1$ da $-\frac{7}{3}$:

$$\frac{3}{2} \int \frac{2x-1-\frac{7}{3}}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx - \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} \int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx$$

ci accorgiamo che $\frac{2x-1}{x^2-x+\frac{1}{4}}$ è la derivata prima di $\ln|x^2-x+\frac{1}{4}|$. Nel frattempo portiamo il $\frac{7}{3}$ quadrato perfetto del secondo integrale al numeratore e risolviamo l'integrale come potenza:

$$\frac{3}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx - \frac{7}{2} \int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \int \left(x-\frac{1}{2}\right)^{-2} dx =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot 2 \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{-2+1} \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right)^{-2+1} = 3 \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(x-\frac{1}{2})} + K =$$
$$= 3 \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{7}{2x-1} + K;$$

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: abbiamo di fronte un falso quadrato al denominatore dell'integranda. Abbiamo allora lavorare sul denominatore in modo da ottenere una derivata "famosa", quella di $\arctg x$. In questo caso il procedimento è un po' più lungo. Possiamo subito ad un esempio per analisi.

zardo:

$$\int \frac{7x+4}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{7x+4}{x^2+2x+1+4} dx = \int \frac{7x}{(x+1)^2+4} dx + \int \frac{4}{(x+1)^2+4} dx$$

Abbiamo osservato che al denominatore c'era un quadrato di cui non ho sommato alcun numero e abbiamo diviso i due termini al numeratore. A questo punto dobbiamo fare in modo che il numeratore del primo integrale ci sia la derivata del denominatore. E' inoltre necessario "aggiustare" il secondo integrale che e' sulla buona strada per diventare la derivata di un arco:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x}{(x+1)^2+4} dx + \int \frac{4}{(x+1)^2+4} dx &= 7 \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx + 4 \int \frac{1}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]} dx = \\ &= \frac{7}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+5} dx + \frac{4}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx = \frac{7}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \frac{7}{2} \int \frac{-2}{(x+1)^2+4} dx + \\ &+ \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx = \frac{7}{2} \ln(x^2+2x+5) + \frac{7}{2} \int \frac{-2}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]} dx + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx \end{aligned}$$

Estraiendo dal primo integrale la costante 7, moltiplicando x per 2 (bilanciando con $\frac{1}{2}$ fuori dall'integrale), sommando e sottraendo 2 abbiamo ottenuto la derivata del denominatore. Infine abbiamo diviso l'integrale in due integrali distinti.

Per quanto riguarda il secondo integrale abbiamo raccolto il 4 e l'abbiamo inglobato nel quadrato al denominatore. Abbiamo infine moltiplicato e diviso per $\frac{1}{2}$, che e' la derivata del quadrato stesso. Opereremo allo stesso modo per l'integrale

$\int \frac{-2}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}$ e potremo allora scrivere la primitiva:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx = \\ = \frac{7}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2 \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + K = \\ = \frac{7}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{3}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + K \end{aligned}$$

Integrazione indefinita per parti

Quando due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, dotate di derivata continua in $[a; b]$, sono troppo "diverse" tra loro (non si vede che possibilità di diretta integrazione) si usa la formula dell'integrazione per parti. Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ devono essere moltiplicate tra loro, o allora, dato che:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

possiamo scrivere:

$$f'(x) \cdot g(x) = D[f(x) \cdot g(x)] - f(x) \cdot g'(x)$$

è integrando otteniamo:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Che è la formula di risoluzione dell'integrale per parti.

Tale formula è molto utile per risolvere un gran numero di integrali indefiniti come i seguenti:

- $\int x \sin x dx$:

poniamo $f'(x) = \sin x$

allora $f(x) = -\cos x$

$f'(x)$ è detto "fattore derivato".

$g(x) = x$

allora $g'(x) = 1$

$g(x)$ è detto "fattore finito".

Pertanto possiamo risolvere:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int 1(-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + K;$$

- $\int x \cos x dx = x \sin x - \int 1 \sin x dx = x \sin x - \cos x + K;$

- $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$:

poniamo $f'(x) = 1$

allora $f(x) = x$

$g(x) = \ln x$

allora $g'(x) = \frac{1}{x}$

Pertanto possiamo risolvere:

$$\int 1 \cdot \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + K;$$

- $\int \arctg x \cdot dx = x \cdot \arctg x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$
 $= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + K$

È importante scegliere attentamente fattore finito e derivato perché si potrebbe finire in qualcosa di più complesso se si sbagliasse a porre $f'(x)$ e $g(x)$. Se, ad esempio, avessimo posto (nel l'integrale $\int x \sin x dx$) $f'(x) = x$ e $g(x) = \sin x$, avremmo che:

multo)

$$\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \cos x \, dx$$

Che è un integrale ancora più complesso di quello di partenza.

Altri integrali vanno risolti con la formula per parti usata "in combinazione" con la regola della transitività dell'uguaglianza (se $a=b$, $b=c$, $c=d$, $d=e$, $e=f$, allora $a=f$). Ecco alcuni esempi:

$$\begin{aligned} - \int \sin^2 x \, dx &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\cos x \sin x + \\ &+ \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Per la transitività dell'uguaglianza:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

Da cui:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \cos x \sin x}{2} + K$$

$$\begin{aligned} - \int \cos^2 x \, dx &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x + \\ &+ \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

Per la transitività dell'uguaglianza:

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

Da cui:

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + K$$

$$- \int e^x \sin x \, dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x - e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

Obteniamo usata la formula dell'integrale per parti due volte con reciprocamente.

Per la transitività dell'uguaglianza:

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Da cui:

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + K$$

Ecco ancora alcuni esempi che ci permetteranno di fare un'osservazione conclusiva!

$$\begin{aligned} - \int x^2 \sin x \, dx &= -\cos x x^2 - \int -\cos x \cdot 2x \, dx = -x^2 \cos x + \sin x \cdot 2x - \int \sin x \cdot 2 \, dx = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \sin x + K; \end{aligned}$$

$$- \int x e^x \, dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \, dx = x e^x - e^x + K = e^x (x-1) + K;$$

$$\begin{aligned}
 - \int \arcsen x \, dx &= \int 1 \cdot \arcsen x \, dx = x \arcsen x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsen x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= x \arcsen x + \int \frac{-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \, dx = x \arcsen x + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + K = \\
 &= x \arcsen x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + K;
 \end{aligned}$$

$$\int x \operatorname{arccot} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \operatorname{arccot} x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{-1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \operatorname{arccot} x + \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} \, dx$$

dividiamo:

x^2	x^2+1
$-x^2-1$	1
1	-1

Proseguiamo:

$$\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{-1}{x^2+1} \right) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{-1}{x^2+1} = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arccot} x + K$$

Assumiamo che:

- in $\int x^m \sen x \, dx$, $\int x^m \cos x \, dx$ e $\int x^m e^x \, dx$ (con $m \in \mathbb{N}_0$) x^m è da considerare fattore finito;
- in $\int x^m \ln x \, dx$, $\int x^m \arcsen x \, dx$, $\int x^m \arccos x \, dx$, $\int x^m \operatorname{arctg} x \, dx$, $\int x^m \operatorname{arccot} x \, dx$ (con $m \in \mathbb{N}_0$) x^m è da considerarsi fattore derivato.

Integrazione indefinita per sostituzione per gli integrali "impossibili"

In molti casi è possibile aiutarsi con la sostituzione della variabile x per risolvere un integrale. Ciò può essere utile anche agli integrali indefiniti immediati, come il seguente:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx = \arcsin(\ln x) + k$$

Supponiamo di accorgerci che $\frac{1}{x}$ è la derivata di $\ln x$, ma non che la frazione con la radice a denominatore è la derivata di $\arcsin(\ln x)$. Proviamo allora a sostituire $\ln(x)$ con t . Si facendo è però anche necessario modificare dx . Non possiamo dire $dx = dt$ poiché dx riguardava il $\ln x$. Dobbiamo sapere ciò che condiziona la variazione di t che richiede in sé $\ln x$. Ricordiamo che la derivata prima di una funzione continua e derivabile moltiplicata per l'incremento infinitesimo dx della sua variabile indipendente dà come risultato la funzione stessa (e questo è il concetto su cui si basa l'integrale). Perciò possiamo dire che:

$$\ln x = \frac{1}{x} \cdot dx \quad \text{e} \quad t = 1 \cdot dt$$

Allora se $\ln x = t$, possiamo ottenere dx in funzione di dt :

$$\frac{1}{x} dx = 1 \cdot dt \\ dx = x \cdot dt$$

Ora possiamo tornare all'integrale:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-t^2}} \cdot x \cdot dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt = \arcsin t + k$$

In questo modo è stato semplice riconoscere che l'integranda era una derivata di $\arcsin$. Ora possiamo sostituire nuovamente t con $\ln x$ e trovare il risultato dell'integrale:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx = \arcsin t + k = \arcsin \ln x + k$$

Il metodo della sostituzione diviene indispensabile quando ci si presentano integrali "impossibili". Essi sono talmente estranei che addirittura ci viene detto cosa dobbiamo sostituire al posto della x . Esaminiamone alcuni:

- $\int \sqrt{1-x^2} dx$ (porre $x = \sin t$): se $x = \sin t$, si ha $1 \cdot dx = \cos t dt$, da

qui rimane $dx = \cos t \cdot dt$. Perciò:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos t \cdot \cos t dt$$

Per ora non preoccupiamoci delle possibilità di $\cos t$ e basterà il quadrato; ci accorgiamo più tardi che $\cos t$ è sicuramente positivo:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \cos t \cdot \cos t dt = +\sin t \cdot \cos t + \int \sin t \sin t dt = \sin t \cos t - \int \cos t dt \\ &= \sin t \cos t - \int \cos t dt = \sin t \cos t + t - \int \cos t dt \end{aligned}$$

A questo punto eguagliamo:

$$\int \cos^2 t dt = \sin t \cos t + t - \int \cos t dt$$

$$2 \int \cos^2 t dt = \sin t \cos t + t$$

$$\int \cos^2 t dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2} + K$$

Ritorniamo ora all'integrale con x : ricordando che $x = \sin t$, si avranno $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ e $t = \arcsin x$:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + K$$

È possibile giustificare le possibilità di $\cos t$ osservando $\arcsin x$: il codominio di $\arcsin x = t$ è $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, da cui $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Se t varia da $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, componendo il seno su t si ottiene un $\cos t$ sempre positivo;

- $\int \frac{\ln x}{x} dx$ (porre $\sqrt{x} = t$): se $\sqrt{x} = t$, si ha $x = t^2$, donde

$1 dx = 2t dt$, da cui rimane $dx = 2t dt$. Perciò:

$$\int \frac{\ln t}{t^2} \cdot 2t dt = \int \frac{2 \ln t}{t} dt = \ln^2 t + K$$

Ritorniamo a x :

$$\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = \ln^2 t + K = \ln^2 \sqrt{x} + K$$